Virtuelle Arbeitsmittel als Weiterführung konkreter Erfahrungen – Überlegungen zur didaktischen Gestaltung computergestützter Handlungen

Christian Urff 2025 (aktualisierter Text zu einer Version von *2011*)

Einleitung

Mathematische Arbeitsmittel sind zentrale Lehr- und Lernwerkzeuge, mit denen sich handelnd grundlegende mathematische Zusammenhänge erforschen lassen (Krauthausen, 2012, 2022). Im Gegensatz zu gegenständlichen Arbeitsmitteln, die Lernende mit den eigenen Händen manipulieren können (z.B. Objekte verschieben, umlegen, umdrehen), sind die „realen“ Handlungsmöglichkeiten bei virtuellen Arbeitsmitteln auf digitale Interaktionen beschränkt. Bei klassischen Desktop-Computern und Notebooks erfolgen Interaktionen primär über Mausklicks oder Tastatureingaben, während Touchscreens in Tablets durch Multi-Touch-Gesten direkte haptische Rückmeldungen ermöglichen (Agostinho et al., 2015). Über AR-Brillen ist neuerdings auch die Eingabe mit natürlichen Handgesten (Finger aufeinanderlegen, drehen usw.) möglich.

Die eigentlichen Handlungen werden bei virtuellen Arbeitsmitteln vom Computer ausgeführt und visuell gerendert – der Benutzer gibt dabei den Anstoß zur Handlungsausführung. Deutlich wird dies am Beispiel eines virtuellen Zwanzigerfeldes: Wendeplättchen lassen sich dort virtuell umdrehen, allerdings nicht durch tatsächliches physisches Umdrehen, sondern per Klick oder Touch-Geste wird die Wendeoperation durch die Software ausgeführt und eine Animation der Wendeoperation angezeigt. Solche vom Computer ausgeführten, aber vom Benutzer initiierten Operationshandlungen bezeichne ich als **computergestützte oder virtuelle Handlungen** (Urff, 2010). Computergestützte Handlungen zeichnen sich dadurch aus, dass die Handlungsinitiierung durch den Benutzer erfolgt, ein wesentlicher Teil der Ausführung allerdings durch den Computer übernommen wird.

Verhältnis von virtuellen zu physischen Handlungen

Einschränkungen und Voraussetzungen

Zunächst ließe sich argumentieren, dass die konkret erfahrbaren Handlungsmöglichkeiten und damit auch die Handlungserfahrungen bei virtuellen Handlungen deutlich eingeschränkt sind. Werden lediglich die taktil-haptischen Erfahrungsmöglichkeiten betrachtet, ist dies sicher zutreffend (Moyer-Packenham & Bolyard, 2016). Das Kind kann ein virtuelles Wendeplättchen nicht physisch

erfühlen, kann nichts riechen, und die Handlung des Umdrehens ist nicht unmittelbar mit einer motorischen Bewegung am Plättchen selbst gekoppelt.

Diese Einschränkung ist der entscheidende Grund, warum virtuelle Arbeitsmittel wenn irgend möglich als **Fortführung und Erweiterung** der Arbeit mit gegenständlichen Arbeitsmitteln eingesetzt werden sollten und nicht als Ersatz (Krauthausen, 2022; Bouck et al., 2020a). Dies gilt besonders für die Primarstufe und den vorschulischen Lernbereich, denn in dieser Entwicklungsphase spielen Primärerfahrungen eine zentrale Rolle für den Aufbau von Verständnis. Ein Kind wird die virtualisierte Wendeoperation am Computer vermutlich nur dann richtig interpretieren können, wenn es bereits selbst ein Wendeplättchen umgedreht hat oder diese Handlung am gegenständlichen Arbeitsmittel beobachtet hat.

Aktuelle Forschung zeigt, dass die Kombination von konkreten und virtuellen Arbeitsmitteln (sogenannte „Blended Manipulatives“) besonders effektiv sein kann (Ahmad et al., 2024; Yakubova et al., 2024). Die Reihenfolge und Vernetzung – erst konkret-physisch, dann virtuell – bleibt dabei didaktisch bedeutsam. Doch warum sollten überhaupt ergänzend zu konkreten Arbeitsmitteln auch noch virtuelle Handlungsmöglichkeiten angeboten werden?

Didaktische Potenziale computergestützter Handlungen

Werden die visuell-auditiven und interaktiven Erfahrungsmöglichkeiten virtueller Handlungen genauer in den Blick genommen, bieten computergestützte Handlungen als Fortführung realer Handlungen durch die technologischen Möglichkeiten einige didaktische Potenziale, die physisch-konkrete Handlungserfahrungen erweitern können:

1. Kognitive Entlastung und Verlagerung durch automatisierte Handlungsausführung

Durch die Übernahme der Handlungsausführung durch den Computer bleiben mehr kognitive Ressourcen für das eigentliche mathematische Lernen verfügbar (Sweller, 2020; Paas & van Merriënboer, 2020). Die Entkopplung von Handlungsimpuls und -ausführung kann die nicht lernrelevante motorische und kognitive Belastung des Kindes verringern (Skulmowski & Xu, 2022). Mit der Cognitive Load Theory gesprochen, entspricht dies dem Prinzip der Reduktion der **extraneous cognitive**

load, also von nicht unbedingt lernrelevanten kognitiven Belastungen (Castro-Alonso, 2020).

Beispiel Rechenfeld: Während bei einem gegenständlichen Zwanzigerfeld Plättchen von Hand auf das Feld geschoben werden müssen und das Kind mit dieser motorischen Bewegung beschäftigt ist, erfolgt dies am Computer automatisiert. Beim virtuellen Zwanzigerfeld wird durch einen Klick oder Touch automatisch eine Einfügebewegung eines oder mehrerer Plättchen animiert. Das Kind muss sich nicht um die korrekte Ausführung der Plättchenbewegung kümmern – was zumindest mit genügend Primärerfahrung für die mathematische Konzeptbildung irrelevant ist –, sondern kann die Einfügeoperation und ihre Auswirkungen beobachten und die Aufmerksamkeit auf die Veränderung auf der symbolischen Ebene richten (die Summe vergrößert sich) und dadurch experimentierend potenziell besser die Zusammenhänge gedanklich nachvollziehen, da mehr kognitive Ressourcen für die Beobachtung der Auswirkung der Handlung zur Verfügung stehen. Gut gestaltete virtuelle Arbeitsmittel haben also im Zusammenspiel mit geeigneten Aufgabenstellungen durch solche Teilautomatisierungen das Potenzial, die kognitive Belastung zu reduzieren und das operative Durchdringen der Lernsituation zu erleichtern, da das Experimentieren mit verschiedenen Handlungsoptionen im Sinne von „Was passiert mit …, wenn …?“ deutlich erleichtert wird.

2. Konzeptuelle Kontrolle der Handlungsausführung

Während bei Handlungen an gegenständlichen Arbeitsmitteln neben mathematisch sinnvollen Handlungen (z.B. Ablegen eines Plättchens) auch Handlungen möglich sind, die keine mathematisch-konzeptionelle Entsprechung haben (z.B. Übereinanderlegen von Plättchen, Fehlplatzierungen, nicht zueinander passende Repräsentationen), können computergestützte Handlungen auf konzeptuell stimmige mathematische Handlungen begrenzt werden (Moyer et al., 2002; Bouck & Park, 2018).

Dadurch werden nur diejenigen Operationen als Handlungen angeboten, die für den Lernenden zur Erarbeitung und Entdeckung der didaktisch bedeutsamen Struktureigenschaften und damit für das Verständnis wichtig sind. Andere, bei analogen Arbeitsmitteln aufgrund der physikalischen Eigenschaften trotzdem mögliche Handlungen werden begrenzt. Beispielsweise wird beim virtuellen Zwanzigerfeld gewährleistet, dass:

- nie mehr als 20 Plättchen auf das Feld gelegt werden können,
- rote Plättchen immer zusammenhängend strukturiert und damit besser erfassbar abgelegt werden (wenn die automatische Strukturierung eingeschaltet ist),
- die 5er- und 10er-Strukturierung automatisch berücksichtigt wird und
- die ikonische und symbolische Darstellung immer zueinander passen.

Diese **konzeptuelle Strukturierung** (conceptual scaffolding) durch digitale Werkzeuge unterstützt das Lernen besonders bei Kindern mit Lernschwierigkeiten (Park et al., 2022; Yakubova et al., 2024). Gerade wenn noch kein tiefgreifendes Verständnis vorliegt, können fehlerhafte Handlungsmöglichkeiten zu fundamentalen Missverständnissen führen. Wenn beispielsweise aufgrund eines Legefehlers am konkreten Zwanzigerfeld die ikonische und symbolische Darstellung nicht zueinander passen (z.B. 14 Plättchen liegen auf dem Feld, aber die Zahl 15 steht daneben), versuchen Kinder häufig, diese Diskrepanz nachträglich zu rationalisieren und konstruieren dabei mitunter fehlerhafte mentale Modelle. Virtuelle Arbeitsmittel können solche Missverständnisse besser vermeiden, indem sie nur konzeptuell korrekte Operationen zulassen und automatisch die Konsistenz zwischen allen Repräsentationsebenen gewährleisten.

3. Synchronisierte Darstellung über multiple Repräsentationsebenen

Durch die computergestützte Ausführung der Handlung ist es möglich, Handlungen über mehrere Repräsentationsebenen zu synchronisieren (Krauthausen, 2012, 2022). Dies ermöglicht die **dynamische Vernetzung** verschiedener Darstellungsformen als ein zentrales Element für ein tiefes mathematisches Verständnis (Moyer-Packenham & Bolyard, 2016).

Beispiel: Wird ein Summand auf dem Rechenfeld um eins vermindert, dann:

- reduziert sich die entsprechende Zahlziffer (symbolische Ebene),
- reduziert sich die Summe um eins,
- wird gleichzeitig auf der ikonischen Ebene ein Plättchen vom Zwanzigerfeld entfernt und es
- reduziert sich die sichtbare Gesamtmenge um ein Element.

Durch diese gestützte Ausführung und dynamische Visualisierung wird die Handlungserfahrung über mehrere Darstellungsebenen hinweg gekoppelt. Dies

ermöglicht Lernchancen, die für die Entwicklung eines umfassenden Verständnisses grundlegender mathematischer Operationen bedeutsam sein können. Besonders für Kinder, die diese Übertragung zwar grundsätzlich selbst vornehmen könnten, bei denen sie aber noch fehleranfällig ist, bestehen hier besondere Lernchancen. Sie können durch die Handlungen ihr mentales Modell der Zusammenhänge zwischen den Darstellungen ausbauen, validieren, verändern und korrigieren – wenn entsprechende Aufgabenstellungen dies anregen (beispielsweise: „Was passiert mit dem Zwanzigerfeld, wenn ich fünf rote Plättchen dazulege? Überlege erst selbst und prüfe dann.“). Allerdings muss diese vernetzte synchrone Darstellung im Umfang und der Ausgestaltung der visuellen Elemente gut ausbalanciert sein, denn durch die Vernetzung gleichzeitig über mehrere Darstellungsebenen hinweg können auch zusätzliche kognitive Belastungen entstehen. Weniger ist hier oft mehr: Eine Reduktion auf jeweils wenige gleichzeitig miteinander verknüpfte Darstellungen ist deshalb empfehlenswert.

4. Realisierung didaktisch wertvoller Handlungen, die gegenständlich nicht möglich sind

Besonders interessant ist die Visualisierung von Handlungsprozessen, die mathematikdidaktische Kernkonzepte veranschaulichen, aber mit gegenständlichen Arbeitsmitteln gar nicht oder nur mit unverhältnismäßig hohem Aufwand realisierbar sind.

Beispiel „Kraft der Fünf“: Während es am gegenständlichen Zwanzigerfeld nicht ohne weiteres gelingt, Mengen in Fünferportionen simultan auf das Feld zu legen, ist dies virtuell gut möglich (Krauthausen, 1995, 2012). Beim virtuellen Zwanzigerfeld können Fünfer- und Einerportionen eingefügt werden. Dadurch kann das Kind anschaulich erfahren, dass es effektiver ist (und weniger „Klicks“ benötigt), sechs Wendeplättchen aus einem Fünfer und einem Einzelplättchen zusammenzulegen, anstatt sechsmal einzelne Plättchen einzufügen.

Beispiel Hunderterfeld und Stellenwertsystem: Hier können beispielsweise Mengen in Zehnerbündel oder als Einer eingefügt werden, sodass die Stellenwertschreibweise anschaulich über die Darstellungsebenen hinweg erfahrbar wird. Manche Apps (z.B. www.lernsoftware-mathematik.de/zahlen) können sogar den Bündelungs- und Entbündelungsprozess dynamisch visualisieren, indem beispielsweise zehn Einer automatisch zu einem Zehner zusammengefasst werden.

Diese Handlungen sind zwar prinzipiell auch mit physischem Material möglich, aber würden viele kognitive Ressourcen für die Ausführung benötigen. Beim Bündeln von Einern zu Zehnern müssen zunächst zehn Einer bestimmt, zusammengefasst und mit einer Zehnerstange getauscht werden. Bis diese Handlung ausgeführt ist, hat ein Kind vermutlich den Zusammenhang zur Stellenwertzahl wieder aus dem Blick verloren.

5. Adaptive Unterstützung und differenzierte Lernwege

Virtuelle Arbeitsmittel können zusätzlich zur reinen Experimentierumgebung noch Unterstützungs- und Differenzierungsangebote beinhalten, wie beispielsweise:

- **Substantielle Aufgabenstellungen**: Gemeint sind damit Aufgaben, die zum eigenständigen Erkunden und Erforschen der Zusammenhänge anregen. Diese Aufgabenstellungen (beispielsweise in Form von Forscherfragen) können entweder innerhalb der App angeboten werden, oder auch extern. Ein gutes (virtuelles) Arbeitsmittel ist nur so gut für das verständnisorientierte Lernen geeignet, wie die begleitenden Aufgabenstellungen!
- **Hinweise und Feedback:** Es können während des Erkundungsprozesses unmittelbare Rückmeldungen zu durchgeführten Handlungen angeboten werden – entweder auf Anforderung oder auch proaktiv durch das digitale Lernsystem. Dies kann visuell oder textuell-sprachlich geschehen, beispielsweise durch visuelle Hinweise (z.B. aufblinkende Plättchenmenge, Hinzufügen von visuellen Strukturierungsmerkmalen am Material) oder eine anregende Frage („Probier doch mal …“, „Überlege …“) zum passenden Zeitpunkt im Lernprozess. Auch KI-gestützte Lernbegleitung kann hier eine sinnvolle Ergänzung sein, um Lehrkräfte während der Exploration mit dem virtuellen Arbeitsmittel zu entlasten und zu ergänzen.
- **Dekomposition komplexer Darstellungen und Operationen:** Komplexe Operationen können in einzelne Schritte zerlegt dargestellt werden und können so leichter erfassbar und manipulierbar gemacht werden. Auch ist es möglich, komplexe Darstellungsformen in miteinander vernetzte Teildarstellungen zu zerlegen.
- **Anpassbare Schwierigkeitsgrade:** Die Elemente und Funktionen virtueller Arbeitsmittel können je nach Lernstand selbst angepasst werden oder sich in einem adaptiven Lernsystem automatisch an den Lernstand und Lernverlauf des Kindes anpassen.
- **Dokumentation von Lernwegen** durch die Aufzeichnung und Wiedergabe

von Handlungen. Die flüchtige Darstellung der Experimentierhandlungen kann für eine spätere Analyse und Besprechung in eine nichtflüchtige Sammlung von Dokumentationseinheiten (statisch – Bild oder Text) oder Handlungssequenzen (dynamisch – Video oder Beschreibung) umgewandelt werden. Durch permanent zur Verfügung stehende Werkzeuge wie eine Bildschirmaufnahme, Screenshots, Notizen oder Tonaufnahmen ist dies auch möglich, wenn das Arbeitsmittel dies nicht selbst anbietet (wie beispielsweise in der App „Rechenfeld“). Durch die Sammlung von Dokumentationseinheiten sind nachgelagerte Lernprozesse wie beispielsweise die Strukturierung der Sammlung, die Darstellung der Ergebnisse, Strategieerkundungen und auch Diagnosemöglichkeiten für die Lehrkraft möglich (Wollring, 2008).

Durch diese Möglichkeiten können virtuelle Arbeitsmittel sehr personalisiert an die Lernbedürfnisse der Lernenden angepasst werden.

Aktuelle Entwicklungen und Technologien zur Erweiterung virtueller Handlungserfahrungen

Touch-Technologie und Embodied Learning

Geräte mit Multi-Touch-Funktion ermöglichen direktere haptische Interaktionen als die klassische Maussteuerung. Deshalb sind Geräte mit Touch-Technologie mittlerweile sehr beliebt im schulischen Kontext, insbesondere in der Primarstufe. Fingertracing und Wischgesten können als biologically primary knowledge genutzt werden und somit die kognitive Belastung reduzieren (Agostinho et al., 2015; Ginns et al., 2015). Beispielsweise kann die Skalierung auf einem virtuellen Zahlenstrahl durch eine intuitive Geste des Wischens oder des Zoom-In/Out mit zwei Fingern schnell und dynamisch verändert werden. Solche Handlungsmöglichkeiten sind mit analogen, statischen Medien nicht umsetzbar.

Künstliche Intelligenz und adaptive Systeme

Moderne virtuelle Arbeitsmittel können durch KI-basierte Systeme adaptive Lernpfade ermöglichen, die sich automatisch an den Lernstand und die Bedürfnisse einzelner Schülerinnen und Schüler anpassen (Haryana et al., 2022). Solche Systeme können die kognitive Belastung dynamisch regulieren und optimale Lernbedingungen schaffen. Die Forschung steht hier allerdings noch am Anfang. Es gibt noch viele offene Fragestellungen insbesondere dazu, wie generative KI sinnvoll

integriert werden sollte, um das Lernen zu unterstützen und nicht zu ersetzen bzw. zu verhindern.

Augmented und Virtual Reality

AR- und VR-Technologien eröffnen neue Möglichkeiten für räumlich-physische virtuelle Handlungsmöglichkeiten, die Bewegung und Lernen integrieren, indem sie dreidimensionale Manipulationen virtueller Objekte und bewegtes Lernen ermöglichen (Altmeyer et al., 2024). Besonders für das räumliche Vorstellungsvermögen bieten solche Technologien vielversprechende Potenziale. Auch embodied learning-Ansätze, bei denen körperliche Bewegungen das mathematische Verständnis integriert fördern, beispielsweise durch die Vermischung realer Erfahrungen mit virtuellen Erfahrungen, sind durch AR- und VR-Technologien möglich.

Beispiel AR Zahlenstrahl: In der App AR Zahlenstrahl können Kinder Handlungen an einem virtuellen Zahlenstrahl vornehmen. Dieser Zahlenstrahl kann direkt auf eine Bezugsfläche des Umfeldes projiziert werden und potenziell unendlich fortgeführt werden. Durch die eigene erfahrbare Bewegung vorwärts und rückwärts am virtuellen AR-Zahlenstrahl können Mächtigkeit der Mengen, Verortung auf dem Zahlenstrahl und Längenverhältnisse in der realen Umgebung (z.B. Schulflur, Schulhof) miteinander in Bezug gesetzt werden.

Kritische Reflexion und Grenzen

Trotz der beschriebenen Potenziale bleibt ein kritischer Blick auf virtuelle Handlungsmöglichkeiten notwendig, insbesondere hinsichtlich der Ausgestaltung und Einbettung in substantielle Lernumgebungen.

Nicht alle virtuellen Arbeitsmittel sind automatisch wirksam

Forschungsergebnisse zur Effektivität virtueller Arbeitsmittel sind nicht einheitlich. Eine aktuelle Studie zeigt beispielsweise, dass konkrete Arbeitsmittel in bestimmten Bereichen (wie Bruchrechnung) zu besseren Lernergebnissen führen können als virtuelle Arbeitsmittel (Al Mutawah et al., 2024). Solche Ergebnisse sind jedoch nicht übertragbar auf Arbeitsmittel bzw. die Technologie an sich. Ähnlich wie es Kriterien für die Auswahl und den Einsatz von gegenständlichen Veranschaulichungsmitteln gibt, sollte der Einsatz weniger an der Technologie, sondern an fachdidaktischen

Kriterien ausgerichtet werden. Die **Gestaltungsqualität** des virtuellen Arbeitsmittels ist entscheidend (Moyer-Packenham & Bolyard, 2016), sowie die Einbettung in entsprechend gestaltete Lernumgebungen und Fragestellungen.

Gefahr der kognitiven Überlastung

Paradoxerweise können schlecht gestaltete digitale Lernumgebungen auch zu erhöhter kognitiver Belastung führen – etwa durch unnötige Animationen, ablenkende Elemente oder zu komplexe Bedienoberflächen (Skulmowski & Xu, 2022).

Bedeutung der Lehrkraft

Virtuelle Arbeitsmittel ersetzen nicht die professionelle fachdidaktische Begleitung durch die Lehrkraft. Ganz im Gegenteil: Virtuelle Arbeitsmittel entfalten ihr Potenzial dann, wenn ihre Nutzung durch entsprechende Aufgabenstellungen, Vor- und Nachbereitung und Lernumgebungen gerahmt ist. Untersuchungen zeigen, dass die Art und Weise, wie Lehrkräfte virtuelle Arbeitsmittel einsetzen, entscheidend für den Lernerfolg ist (Larkin, 2016). Die **mathematikdidaktische Kompetenz** der Lehrkraft bleibt zentral.

Fazit und Ausblick

Über virtuelle Handlungen lassen sich bei entsprechender Gestaltung Handlungs- und Erfahrungsmöglichkeiten für das mathematische Lernen realisieren, die ein bedeutsames didaktisches Potenzial gegenüber Handlungen an nicht-virtuellen Arbeitsmitteln bieten können (Krauthausen, 2022; Bouck et al., 2020b). Sie sind als **sinnvolle Ergänzung und Weiterführung** von realen Handlungen anzusehen – nicht als Ersatz. Virtuelle Handlungen benötigen als Basis für die Interpretation und sinnvolle Anwendung häufig analoge Primärerfahrungen mit gegenständlichen Arbeitsmaterialien. Zentrale Bedingungen für den gewinnbringenden Einsatz virtueller Arbeitsmittel und virtueller Handlungen sind:

1. **Fachdidaktische Fundierung:** Die Ausgestaltung virtueller Handlungen an Arbeitsmitteln sollte sich an bewährten mathematikdidaktischen Konzepten und Prinzipien orientieren.

2. **Gestaltungsqualität:** Eine sorgfältige Gestaltung der virtuellen Arbeitsmittel nach Erkenntnissen des Lernens mit Multimedia und fachdidaktischen Prinzipien ist unabdingbar (Urff, 2014).
3. **Zusammenspiel von physisch und digital** (Duo of artefacts): Virtuelle Handlungen bauen auf Erfahrungen mit gegenständlichen Arbeitsmitteln auf und können auch sinnvoll gemeinsam als „Duo of Artifacts“ eingesetzt werden (Bonow, 2020).
4. **Lehrkraftprofessionalisierung:** Lehrkräfte benötigen Kompetenzen für den reflektierten Einsatz digitaler Medien, um die spezifischen Möglichkeiten digitaler Lernmaterialien und Handlungen auch zu nutzen und sie nicht einfach nur als Ersatz für analoge Medien zu nutzen.

Bei der Gestaltung virtueller Arbeitsmittel und Handlungsangebote sind aus fachdidaktischer Sicht folgende Gestaltungsprinzipien handlungsleitend (vgl. Urff, 2012):

- Gestalte virtuelle Arbeitsmittel so, dass der Nutzer bei der Ausführung von Handlungen entlastet wird von nicht für die mathematische Konzeptbildung relevanten Aktivitäten. Dadurch werden möglichst viele kognitive Ressourcen für das mathematische Erkunden verfügbar.
- Versuche über virtuelle Handlungsangebote und Visualisierungen möglichst gut die zu fördernden mathematischen (Denk-)Operationen abzubilden.
- Gestalte virtuelle Arbeitsmittel so, dass der Zusammenhang zwischen unterschiedlichen Repräsentationen für die Kinder nachvollziehbar wird.
- Ermögliche Handlungen, die mit konkreten Arbeitsmitteln nicht oder nur sehr schwer realisierbar sind.

Die Digitalität und dadurch fortschreitende Digitalisierung im Bildungsbereich bietet Chancen, sollte aber nicht zu unkritischer Technologieeuphorie führen. Es geht nicht darum, traditionelle Arbeitsmittel zu ersetzen, sondern das didaktische Repertoire **klug zu erweitern** (Krauthausen, 2022). Zukünftige Forschung und Praxis sollten deshalb weiterhin immer kritisch untersuchen, unter welchen Bedingungen welche Kombinationen von konkreten und virtuellen Arbeitsmitteln für welche Lernziele und Zielgruppen optimal sind.

Literatur

Agostinho, S., Tindall-Ford, S., Ginns, P., Howard, S. J., Leahy, W., & Paas, F. (2015). Giving learning a helping hand: Finger tracing of temperature graphs on an iPad. *Educational Psychology Review*, *27*(3), 427-443. https://doi.org/10.1007/s10648-015-9315-5

Ahmad, K., Khalid, M., & Khan, S. (2024). The effect of concrete and virtual manipulative blended instruction on mathematical achievement for elementary school students. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *24*(4), 515-532. https://doi.org/10.1007/s42330-024-00336-y

Al Mutawah, M., Thomas, R., & Khine, M. S. (2024). Impact of using virtual and concrete manipulatives on students‘ learning of fractions. *Cogent Education*, *11*(1), Article 2379712. https://doi.org/10.1080/2331186X.2024.2379712

Altmeyer, K., Kapp, S., Thees, M., Malone, S., Kuhn, J., & Brünken, R. (2024). The impact of individual differences on learning with augmented reality. In F. Krieglstein et al. (Hrsg.), *Cognitive load theory: Emerging trends and innovations* (S. 112-128). MDPI.

Bonow, J. (2020). Rechendreiecke analog und digital. Potenziale der Kombination von Arbeitsmitteln in inklusiven Settings. In S. Ladel, C. Schreiber, R. Rink, & D. Walter (Hrsg.), Forschung zu und mit digitalen Medien. Befunde für den Mathematikunterricht der Primarstufe (S. 55–70). WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Bouck, E. C., & Park, J. (2018). A systematic review of the literature on mathematics manipulatives to support students with disabilities. *Education and Treatment of Children*, *41*(1), 65-106.

Bouck, E. C., Satsangi, R., & Park, J. (2020a). The concrete-representational-abstract approach for students with learning disabilities: An evidence-based practice synthesis. *Remedial and Special Education*, 39(4), 211-228. https://doi.org/10.1177/074193251879261112

Bouck, E., Park, J., & Stenzel, K. (2020b). Virtual manipulatives as assistive technology to support students with disabilities with mathematics. *Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth*, *64*,

1–9. https://doi.org/10.1080/1045988X.2020.1762157

Castro-Alonso, J. C. (2020). Latest trends to optimize computer-based learning: Guidelines from cognitive load theory. *Computers in Human Behavior*, *112*, Article 106458. https://doi.org/10.1016/j.chb.2020.106458

Ginns, P., Hu, F. T., Byrne, E., & Bobis, J. (2015). Learning by tracing worked examples. *Applied Cognitive Psychology*, *3*0(2), 160-169. https://doi.org/10.1002/acp.3656

Haryana, M. R. A., Rambli, D. R. A., Sulaiman, S., & Sunar, M. S. (2022). Virtual reality learning media with innovative learning materials to enhance individual learning outcomes based on cognitive load theory. *The International Journal of Management Education*, *20*(3), Article 100657. https://doi.org/10.1016/j.ijme.2022.100657

Krauthausen, G. (1995). Die „Kraft der Fünf“ und das denkende Rechnen. In G. N. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 87-108). Arbeitskreis Grundschule.

Krauthausen, G. (2012). *Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule*. Springer Spektrum.

Krauthausen, G. (2022). Zur Digitalisierungsdebatte im Mathematikunterricht der Grundschule. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Mathematische Bildung heute und morgen: Herausforderungen und Perspektiven* (S. 25-40). University of Bamberg Press. https://doi.org/10.20378/irb-55799

Larkin, K. (2016). Mathematics education and manipulatives: Which, when, how? *Australian Primary Mathematics Classroom*, *21*(1), 12-17.

Moyer, P. S., Bolyard, J. J., & Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching Children Mathematics*, *8*(6), 372-377.

Moyer-Packenham, P. S., & Bolyard, J. J. (2016). Revisiting the definition of a virtual manipulative. In P. S. Moyer-Packenham (Ed.), *International perspectives on teaching and learning mathematics with virtual manipulatives* (pp. 3-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1_1

Paas, F., & van Merriënboer, J. J. G. (2020). Cognitive-load theory: Methods to

manage working memory load in the learning of complex tasks. *Current Directions in Psychological Science*, *29*(4), 394-398. https://doi.org/10.1177/0963721420922183

Park, J., Bryant, D. P., & Shin, M. (2022). Effects of interventions using virtual manipulatives for students with learning disabilities: A synthesis of single-case research. *Journal of Learning Disabilities*, *55*(4), 325-337. https://doi.org/10.1177/00222194211006336

Skulmowski, A., & Xu, K. M. (2022). Understanding cognitive load in digital and online learning: A new perspective on extraneous cognitive load. *Educational Psychology Review*, *34*(1), 171-196. https://doi.org/10.1007/s10648-021-09624-7

Sweller, J. (2020). Cognitive load theory and educational technology. *Educational Technology Research and Development*, *68*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s11423-019-09701-3

Urff, C. (2014). *Digitale Lernmedien zur Förderung grundlegender mathematischer Kompetenzen.*
Theoretische Analysen, empirische Fallstudien und praktische Umsetzung anhand der Entwicklung virtueller Arbeitsmittel. Mensch und Buch

Urff, C. (2012). Virtuelle Arbeitsmittel im Mathematikunterricht der Primarstufe. In S. Ladel & C. Schreiber (Hrsg.): Lernen, Lehren und Forschen in der Primarstufe (Band 1) (S. 59-82). Franzbecker

Urff, C. (2010). Potentiale und Perspektiven computergestützter Lernförderung beim Erwerb grundlegender mathematischer Kompetenzen. *Zeitschrift für Heilpädagogik*, 61(4), 141–150.

Wollring, B. (2008). Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In Kasseler Forschergruppe (Hrsg.), *Lernumgebungen auf dem Prüfstand. Zwischenergebnisse aus den Forschungsprojekten* (S. 9–26). Kassel University Press.

Weiterführende Literatur

Nicht im Text zitiert, aber thematisch einschlägig.

Bouck, E. C., Park, J., Sprick, J., Shurr, J., Bassette, L., & Whorley, A. (2017). Using

the virtual-representational-abstract approach to support students with intellectual disability in mathematics. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities*, *3*3(4). https://doi.org/10.1177/1088357618755696

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2010). *Umgang mit Heterogenität: Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule*. IPN-Materialien. http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Krauthausen-Scherer.pdf